Dr. HERBERT VOHLA : KOMPLEXE ZAHLEN - ein vernachläßigtes Gebiet der Schulmathematik

Zahlenbereichserweiterungen

1. $\{+,-\} \times N_0 = Z$, kann zu einem Ring strukturiert werden.
2. $Z \times Z = B$ bzw. Q, kann zu einem Körper strukturiert werden.
3. $Q \times Q$ ist die Grundmenge für Intervallschachtelungen; führt zur Menge R. Diese kann zu einem Körper strukturiert werden.
4. $R \times R = C$, kann zu einem Körper strukturiert werden; die dazu erforderlichen Axiome für das Rechnen ergeben sich durch Betrachtung von Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen in der Ebene.

Axiome für das Rechnen im KKZ

AX1 $(a/b) + (c/d) = (a+c/b+d)$ .... RR Addition

AX2 $(a/b) \cdot (c/d) = (ac-bd/ad+bc)$ .... RR Multiplikation

AX3 $[(a/b) = (c/d)] \Leftrightarrow [(a=c) \wedge (b=d)]$ .... Gleichheitsdefinition

AX4 $(a/0) = a$ .... Einbettungssatz $R \subset C$.

Weitere (praktische) Rechenregeln, axiomatisch hergeleitet

1. Gegenzahl einer Komplexen Zahl, Subtraktion zurückgeführt auf die Addition.
   $-(a/b)$ soll Lösung der Gleichung $(a/b) + (x/y) = (0/0)$ sein. Es nützt zum Lösen die Äquivalenzumformung durch Addition von $(-a/-b)$ unter Anwendung von AX1: $(x/y) = (-a/-b)$.
   Ergebnis: $-(a/b) = (-a/-b)$; dies ist interpretierbar als $(-1).(a/b)$ nach AX4 und AX2 (und AX3): $-(a/b) = (-1/0).(a/b) = (-1).(a/b)$.

2. Kehrwert einer Komplexen Zahl, Division zurückgeführt auf die Multiplikation.
   $\frac{1}{(a/b)}$ sei Lösung der Gleichung $(a/b).(x/y) = (1/0)$ mit $a^2+b^2 \neq 0$.
   Anwendung von AX2 und AX3 bringt $(ax-by=1) \wedge (bx+ay=0)$, also auch
   $x = \frac{a}{a^2+b^2}$, $y = \frac{-b}{a^2+b^2}$. Ergebnis: $\frac{1}{(a/b)} = \left(\frac{a}{a^2+b^2} / \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$.

3. Konjugiertkomplexe Zahlenpaare.
   Das Ergebnis von 2. zeigt die Nützlichkeit des Begriffs "Konjugierte einer Komplexen Zahl": $z = (a/b)$, $\overline{z} = (a/-b)$.
   Anwendungen: $\frac{1}{z} = \frac{1}{a^2+b^2} . \overline{z}$ bzw. $z.\overline{z} = a^2+b^2$.

   Also kann man schreiben: $z.\overline{z} = |z|^2$.
   Ferner gilt: $a = Re(z) = \frac{1}{2}.(z+\overline{z})$, $b = Im(z) = \frac{1}{2i}.(z-\overline{z})$; $\overline{\overline{z}} = z$ u.v.a.

Beispiele zum axiomatischen Lösen von algebraischen Gleichungen 2-ten Grades

1. $\underline{\underline{z^2 - 8iz - 16 = 0}}$ ist in C zu lösen.

$(x/y)^2 - (0/8).(x/y) - (16/0) = (0/0)$ ....(Grundgedanke)........ AX4

$(x^2-y^2/2xy) - (-8y/8x) - (16/0) = (0/0)$ AX2

$(x^2-y^2+8y-16/2xy-8x) = (0/0)$ AX1

$\underbrace{(x^2-y^2+8y-16=0)}_{\mathrm{I}} \wedge \underbrace{(2xy-8x=0)}_{\mathrm{II}}$ AX3

Aus Gleichung II: $x.(y-4) = 0$

Fall 1 ... $x=0$ ergibt in I: $-y^2+8y-16=0$ bzw. $(y-4)^2=0$,

also $(0/4)^{(2)}$.

Fall 2 ... $y=4$ führt zum selben Zahlenpaar wie Fall 1.

Gesamtergebnis: $\underline{\underline{L = \left\{(0/4)^{(2)}\right\}}}$.

2. $\underline{\underline{z^2 - (9+15i).z - 46 + 78i = 0}}$ ist in C zu lösen.

$(x/y)^2 - (9/15).(x/y) + (-46/78) = (0/0)$ ....(Grundgedanke).... AX4

$(x^2-y^2/2xy) - (9x-15y/15x+9y) + (-46/78) = (0/0)$ AX2

$(x^2-y^2-9x+15y-46/2xy-15x-9y+78) = (0/0)$ AX1

$\underbrace{(x^2-y^2-9x+15y-46=0)}_{\mathrm{I}} \wedge \underbrace{(2xy-15x-9y+70=0)}_{\mathrm{II}}$ AX3

Aus Gleichung II: $y = \frac{15x-70}{2x-9}$, wird in I verwendet:

$(x^2-9x-46).(4x^2-36x+81) - (15x-78)^2 + 15.(15x-70).(2x-9) = 0$

$4x^4-36x^3+81x^2-36x^3+324x^2-729x-184x^2+1656x-3726-225x^2+2340x-6084+450x^2-$
$-4365x+10\,530 = 0$,

$4x^4-72x^3+446x^2-1098x+720 = 0$ bzw. $2x^4-36x^3+223x^2-549x+360 = 0$;

1 ist Lösung (sofort zu sehen), die Division durch $(x-1)$ führt auf $2x^3-34x^2+189x-360 = 0$ mit der reellen Lösung 8. Die zugeordneten y-Werte sind 9 und 6.

Somit Ergebnis: $\underline{\underline{L = \left\{(1/9),(8/6)\right\}}}$

Fortsetzung: Weitere praktische Rechenregeln, axiomatisch hergeleitet

4. Binomialschreibweise für Komplexe Zahlen

$(a/b) \overset{AX1}{=} (a/0)+(0/b) \overset{AX2}{=} (1/0).(a/0)+(0/1).(b/0) \overset{AX3}{=} 1.a+(0/1).b \overset{*)}{=} a+i.b$.

*) Es hat sich als vereinfachend erwiesen, für die sogenannte "imaginäre Einheit" (0/1) den Buchstaben "i" zu verwenden. Man kann dann und aufgrund der Axiome AX1 und AX2 mit Termen der Form a+ib nach den gleichen Regeln rechnen wie mit reellen Binomen, wenn man stets i^2 durch -1 ersetzt:
$i^2 \overset{def}{=} (0/1)^2 \overset{AX2}{=} (-1/0) \overset{AX4}{=} -1$.

5. Goniometrische Schreibweise einer Komplexen Zahl

$z = a+bi = |z|.(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $\varphi = \arg z$; $a = |z|.\cos\varphi$, $b = |z|.\sin\varphi$, $\varphi = \arctan\frac{b}{a}$.
Gut geeignet vorallem bei multiplikativen Berechnungen; die MOIVREsche Formel $(\cos\varphi+i.\sin\varphi)^n = \cos n\varphi+i.\sin n\varphi$ gestattet das Lösen einiger Aufgaben außerhalb des Körpers der Komplexen Zahlen (z.B. das Lösen von Kreisteilungsgleichungen; Beginn der Funktionentheorie; Abraham de MOIVRE, 1667-1754). Von entscheidender Bedeutung ist jedoch die Formel $\cos z + i.\sin z = e^{iz}$ (gültig für alle komplexen Argumentwinkel z; Leonhard EULER, 4.4.1707 - 18.9.1783).

Die EULERsche Formel

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i.\sin x}$$

1. Standard-Herleitung mithilfe von Potenzreihen

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \ldots$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \ldots$,

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots$, $x \to ix$ ergibt sich:

$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{ix^7}{7!} + + - - \ldots$

Also gilt auch:

$e^{ix} = (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \ldots) + i.(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \ldots) =$

$= \underline{\cos x + i.\sin x}$, w.z.b.w..

2. Herleitung mithilfe einer Differentialgleichung

Ansatz: $y = \cos x + i.\sin x$ mit $y(0) = 1$. Durch Differenzieren erhält man:

$y' = -\sin x + i.\cos x$ und man erkennt mühelos: $y' = i.y$.

Integration in der Form $\frac{y'}{y} = i$ führt auf $\ln y = i.x + 0$ (wegen $y(0)=1$)

Somit gilt $\underline{y = e^{ix}}$, was herzuleiten war .

3. Rechenbeispiel: Man ermittle $\int_0^1 \frac{dx}{x^4+1}$ mithilfe Komplexer Zahlen.

Partialbruchzerlegung ergibt $\int \frac{dx}{x^4+1} = \underbrace{\frac{i}{2}\cdot\int\frac{dx}{x^2+i}}_{I_1} - \underbrace{\frac{i}{2}\cdot\int\frac{dx}{x^2-i}}_{I_2}$.

Bei I_1 hilft die Substitution $x^2=i.y^2$, $x=\sqrt{i}.y$, $dx=\sqrt{i}.dy$ weiter; I_2 braucht nicht extra gerechnet zu werden, weil I_1 und I_2 konjugiert komplex sind.

$$I_1 = \frac{i}{2}\int_0^1\frac{dx}{x^2+i} = \frac{i}{2}\cdot\int_0^{1/\sqrt{i}}\frac{\sqrt{i}.dy}{i(y^2+1)} = \frac{\sqrt{i}}{2}\cdot\int_0^{1/\sqrt{i}}\frac{dx}{x^2+1} = \frac{\sqrt{i}}{2}.\arctan\frac{1}{\sqrt{i}} .$$

Nebenrechnung für $\arctan\frac{1}{\sqrt{i}}$: $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})$, $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})$;

$\tan z = \frac{1}{i}\cdot\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}$, i.u.F.: ($z=\arctan\frac{1}{\sqrt{i}}$) gilt:

$$e^{2iz} = \frac{1+\sqrt{i}}{1-\sqrt{i}} \overset{1+\sqrt{i}}{=\!=} \frac{i+2\sqrt{i}+1}{1-i} \overset{1+i}{=\!=} \frac{i+2\sqrt{i}+1-1+2i\sqrt{i}+i}{2} = \sqrt{i}+i+i\sqrt{i} = \ldots = i(1+\sqrt{2}) ;$$

$$2iz = \ln i(\sqrt{2}+1) = \ln(\sqrt{2}+1) + \frac{i\pi}{2} , \quad z = \frac{1}{2i}.\ln(\sqrt{2}+1) + \frac{\pi}{4} ;$$

$$I_1 = \frac{\sqrt{i}}{2}.(\frac{1}{2i}.\ln(\sqrt{2}+1) + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{4}.(1+i).(-\frac{i}{2}.\ln(\sqrt{2}+1) + \frac{\pi}{4}) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}.(-\frac{i}{2}.\ln(\sqrt{2}+1) + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.\ln(\sqrt{2}+1) + \frac{i\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}.(\frac{1}{2}.\ln(\sqrt{2}+1) + \frac{\pi}{4}) + Im =$$

$= \frac{\sqrt{2}}{8}.(\ln(\sqrt{2}+1) + \frac{\pi}{2}) + Im$, also gilt für das gesamte Integral $I_1+I_2 =$

$= 2.Re(I_1)$:

$$\underline{\underline{\int_0^1\frac{dx}{x^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{4}.(\ln(\sqrt{2}+1) + \frac{\pi}{2})}} \quad (\approx 0,866972\,9873)$$

Komplexe Potenzen von komplexen Basiswerten (Hauptwerte)

1. Man berechne $(4+3i)^{(2+i)}$!

$$(4+3i)^{(2+i)} = e^{(2+i).\ln(4+3i)} = e^{(2+i).(\ln 5 + i.\arctan\frac{3}{4})} =$$

$$= e^{(\ln 25-\arctan\frac{3}{4})}.e^{i.(\ln 5+2.\arctan\frac{3}{4})} = e^{2,575\,374\,716}.e^{i.2,896\,440\,13} =$$

$$= 13,136\,238\,59.(\cos 165,953\,795° + i.\sin 165,953\,795°) = \underline{\underline{-12,743\,469\,23+i.3,188\,221\,476}}$$

(gerechnet mit HP-35 Calculator).

Zur Probe kann z.B.: $(7+24i).(4+3i)^i$ gerechnet werden.

2. Pflichtübungen: $i^i = e^{i.\ln i} = e^{i.(\underbrace{\ln 1}_{=0} + i\frac{\pi}{2})} \equiv \underline{\underline{e^{-\pi/2}}}$ $(= (-i)^{-i}; \approx 0,207\,879\,576\,3)$

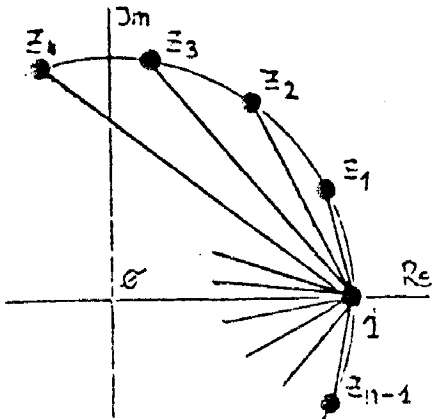
$i^{(-i)} = e^{-i.\ln i} = \ldots\ldots = \underline{\underline{e^{\pi/2}}}$ $(= (-i)^i; \approx 4,810\,477\,382)$

Man beachte: Die (Haupt-) Werte von arctan müssen im Bogenmaß weiterverwendet werden !

Beweis (Herleitung einer Formel) ohne Verwendung der Formel von EULER

Gegeben sei ein regelmäßiges n-Eck mit dem Umkreisradius r. Behauptung:
Das Produkt $P(n)$ der Längen aller $n-1$ Verbindungdstrecken eines Eckpunkts mit den übrigen hat stets den Wert $n.r^{n-1}$. (Siehe auch "Wissenschaftliche Nachrichten", April 1985).

Beweis:



Es genügt zu für r=1: $P(n) = n$.
Zu diesem Zweck betrachte man die Kreisteilungsgleichung $z^n-1=0$ bzw. ihre HORNERsche Faktorisierung $(z-1).(z^{n-1}+z^{n-2}+z^{n-3}+\ldots+z+1) = 0$, wobei der zweite Faktor die Lösungen $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ und auch $\overline{z_1}, \overline{z_2}, \ldots, \overline{z_{n-1}}$ liefert. Man kann schreiben:

$$z^{n-1}+z^{n-2}+\ldots+z+1 = (z-z_1)(z-z_2).\ \ldots\ .(z-z_{n-1}),$$
$$z^{n-1}+z^{n-2}+\ldots+z+1 = (z-\overline{z_1})(z-\overline{z_2}).\ \ldots\ .(z-\overline{z_{n-1}}).$$

Für z=1 ergibt sich: $n = (1-z_1)(1-z_2).\ \ldots\ .(1-z_{n-1})$ und auch
$n = (1-\overline{z_1})(1-\overline{z_2}).\ \ldots\ .(1-\overline{z_{n-1}}) = (\overline{1-z_1})(\overline{1-z_2}).\ \ldots\ .(\overline{1-z_{n-1}})$. Durch Multiplizieren erhält man $(1-z_1)(\overline{1-z_1}).(1-z_2)(\overline{1-z_2}).\ \ldots\ .(1-z_{n-1})(\overline{1-z_{n-1}}) = n^2$, dies ist wegen $(1-z_k)(\overline{1-z_k}) = |1-z_k|^2$ gleich dem Wert von $P(n)^2$; also gilt $\underline{\underline{P(n) = n}}$, q.e.d.

Integration mithilfe Komplexer Zahlen, Verwendung der Formel $\boxed{\ln z = \ln|z| + i.\arg z}$

Zu ermitteln sei das unbestimmte Integral $\int\frac{dx}{x^2+1}$.

Durch Partialbruchzerlegung ergibt sich $\int\frac{dx}{x^2+1} = \frac{i}{2}.\int\left(\frac{1}{x+i} - \frac{1}{x-i}\right)dx = \underline{\frac{i}{2}.\ln\frac{x+i}{x-i} + C}$.

Rechenbeispiel dazu:
$$\int_0^1\frac{dx}{x^2+1} = \frac{i}{2}.\left[\ln\frac{1+i}{1-i} - \ln(-1)\right] = \frac{i}{2}.\left[\ln i - \ln(-1)\right] =$$
$$= \frac{i}{2}.\left[\ln|i| + i.\frac{\pi}{2} - \ln|-1| - i\pi\right] = \frac{i}{2}.\left(\frac{i\pi}{2} - i\pi\right) = \frac{i}{2}.\left(-\frac{i\pi}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}.$$

2. Rechenbeispiel: $\int_0^1\frac{dx}{x^3+1}$ ist zu berechnen. Partialbruchzerlegung führt auf

$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3}.\left(\frac{1}{x+1} - \frac{a}{x-a} - \frac{\overline{a}}{x-\overline{a}}\right)$, wobei a für $\frac{1}{2}.(1+i\sqrt{3})$ steht. Dies führt auf:

$$\int\frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}.\left[\ln(x+1) - a.\ln(x-a) - \overline{a}.\ln(x-\overline{a})\right] + C = \underline{\frac{1}{3}.\left[\ln(x+1)-2.\mathrm{Re}(a.\ln(x-a))\right] + C}.$$

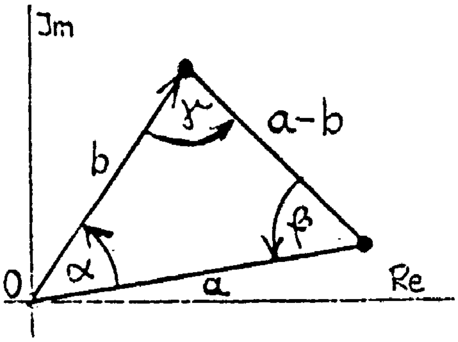
Daraus ergibt sich: $\int_0^1\frac{dx}{x^3+1} = \ldots = \underline{\underline{\frac{1}{3}.\left(\ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)}}$ $(\approx 0{,}835648\,8483\ldots)$

Bemerkungen: Kontrollrechnung mit einem programmierbaren Taschenrechner ergab bei 100 SIMPSON-Streifen gleicher Breite: 0,835648 847.

In der rein reellen Integralrechnung wird in diesem Fall die arctan-Funktion verwendet (und Integralsubstitution).

Elementargeometrische Anwendungen von Komplexen Zahlen-

1. Satz von der Winkelsumme im ebenen Dreieck (Beweis)



$$\underbrace{\underbrace{\frac{b}{a}\cdot\frac{|a|}{|b|}}_{e^{i\alpha}}\cdot\underbrace{\frac{a}{a-b}\cdot\frac{|a-b|}{|a|}}_{e^{i\beta}}\cdot\underbrace{\frac{b-a}{b}\cdot\frac{|b|}{|b-a|}}_{e^{i\gamma}}}_{e^{i(\alpha+\beta+\gamma)}} = -1 = e^{i\pi}$$

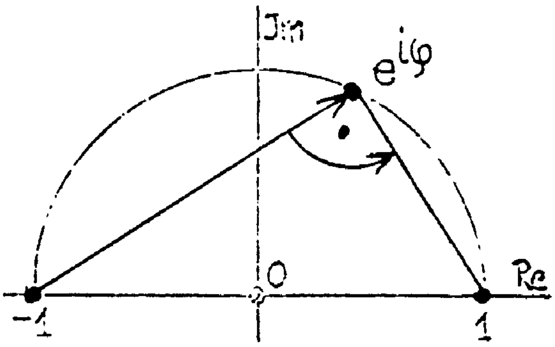
also gilt: $\alpha+\beta+\gamma = 180°$

Man beachte: $|a-b| = |b-a|$!

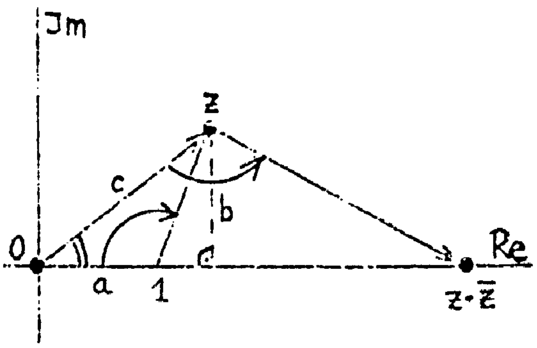
2. Satz des THALES von Milet (Beweis)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{e^{i\varphi}-1}{e^{i\varphi}+1} \overset{e^{-i\varphi}+1}{=\!=} \frac{1-e^{-i\varphi}+e^{i\varphi}-1}{1+e^{-i\varphi}+e^{i\varphi}+1} \;;$$

Man beachte, daß $e^{i\varphi}$ und $e^{-i\varphi}$ konjugiert komplex sind; also ist der Zähler rein imaginär, der Nenner reell und somit der Bruch rein imaginär; w.z.b.w.



3. Pythagoräischer Seitensatz (Herleitung)



Es sei $z = a+ib$; $z\cdot\bar z = a^2+b^2$ ist reell.

Wegen $\frac{z\cdot\bar z - z}{z} = \bar z - 1$ sind die Dreiecke $\triangle(0;1;z)$ und $\triangle(0;z;z\cdot\bar z)$ gegensinnig ähnlich; also gilt:

$1 : c = c : (a^2+b^2)$ bzw. $c^2 = a^2 + b^2$, was herzuleiten war.

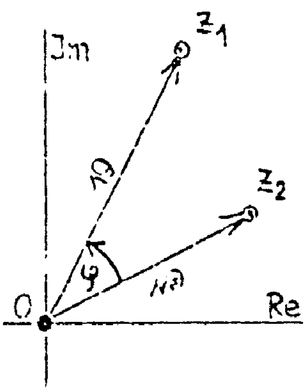
4. Verbindung zum Skalarprodukt der Vektorrechnung im R_2

Es sei $z_1 = a+ib \mathrel{\hat=} \mathfrak{a}$ und $z_2 = c+id \mathrel{\hat=} \mathfrak{b}$. Dann gilt:

$$e^{i\varphi} = \frac{z_1}{|z_1|} : \frac{z_2}{|z_2|} \;;\quad \cos\varphi = \mathrm{Re}\left(\frac{z_1\cdot |z_2|}{z_2\cdot|z_1|}\right) \overset{\bar z_2}{=\!=}$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{z_1\cdot\bar z_2\cdot|z_2|}{z_2\cdot\bar z_2\cdot|z_1|}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{z_1\cdot\bar z_2}{|z_1|\cdot|z_2|}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{(a+ib)(c-id)}{|z_1|\cdot|z_2|}\right) =$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{ac+bd+i\,\mathrm{Im}}{|z_1|\cdot|z_2|}\right) \mathrel{\hat=} \frac{\mathfrak{a}\circ\mathfrak{b}}{|\mathfrak{a}|\cdot|\mathfrak{b}|} \;;$$ was zu zeigen war.



5. Berechnung des Winkels zweier Komplexer Zahlen mithilfe der Körpereigenschaften von C.

Vorbemerkung: Im Vektorraum V_2 können Vektoren durch Vektoren nicht dividiert werden; hingegen kann man im Körper der Komplexen Zahlen Brüche und sogar Doppelbrüche berechnen.

Grundgedanke: $e^{i\varphi} : e^{-i\varphi} = e^{2i\varphi}$; $\varphi = \frac{1}{2i} . \ln e^{2i\varphi}$. Ansatz: $\varphi = \beta - \alpha$.

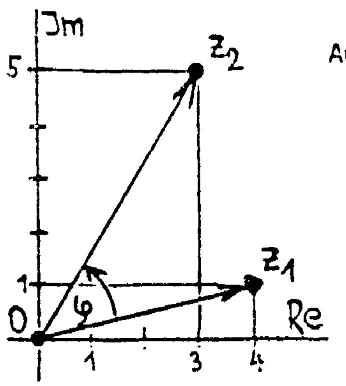
$$e^{i\varphi} : e^{-i\varphi} =$$

$$\cdot(-i)\left(\frac{\overbrace{\cos\beta + i.\sin\beta}^{:\cos\beta}}{\underbrace{\cos\alpha + i.\sin\alpha}_{:\cos\alpha}} : \frac{\overbrace{\cos\beta - i.\sin\beta}^{:\cos\beta}}{\underbrace{\cos\alpha - i.\sin\alpha}_{:\cos\alpha}}\right).i =$$

$$= \frac{\tan\beta - i}{\tan\alpha - i} : \frac{\tan\beta + i}{\tan\alpha + i} = \frac{\tan\beta - i}{\tan\beta + i} : \frac{\tan\alpha - i}{\tan\alpha + i};$$ somit ergibt sich:

$$\underline{\underline{\varphi = \frac{1}{2i} . \ln DV(k_2, k_1; i, -i)}}$$

Beispiel: Man berechne den Winkel zwischen den den Komplexen Zahlen $1+4i$ und $3+5i$.



Aus der Angabe folgt: $k_2 = \frac{5}{3}$ und $k_1 = \frac{1}{4}$.

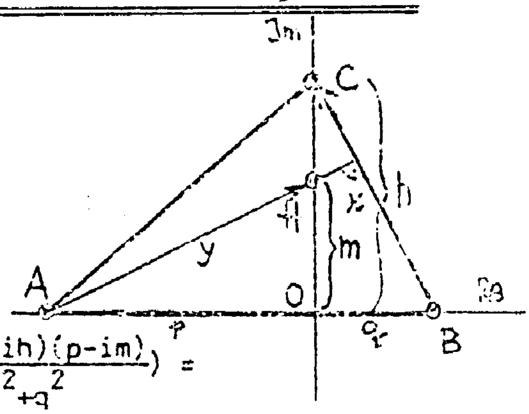
$$= \frac{1}{2i} . \ln \frac{5/3 - i}{5/3 + i} : \frac{1/4 - i}{1/4 + i} = \frac{1}{2i} . \ln \frac{(5-3i)(1+4i)}{(5+3i)(1-4i)} =$$

$$= \frac{1}{2i} . \ln \frac{17+17i}{17-17i} = \frac{1}{2i} . \ln \frac{1+i}{1-i} = \frac{1}{2i} . \ln \frac{2i}{2} = \frac{1}{2i} . \ln i =$$

$$= \frac{1}{2i} . i . \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}} \ (\hat{=}\ 45^\circ) .$$

Anwendungen von KZ zum Lösen von Aufgaben aus der Elementargeometrie

Aufgabe: Man beweise für ebene Dreiecke, daß für den Höhenabschnitt m gilt: $m = \frac{p.q}{h}$ (siehe Zeichnung rechts !).



Beweis: $x = -q+ih$, $y = p+im$; Normalität besteht, wenn $\operatorname{Re}(\frac{x}{y}) = 0$ gilt.

$$\operatorname{Re}\left(\frac{x}{y}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{-q+ih}{p+im}\right) \overset{p-im}{=\!=\!=} \operatorname{Re}\left(\frac{(-q+ih)(p-im)}{p^2+q^2}\right) =$$

$$= \frac{-pq+hm}{p^2+m^2} = 0; \text{ also } -pq+hm = 0 \text{ bzw. } \underline{\underline{m = \frac{p.q}{h}}} .$$

Damit kann der Satz leicht bewiesen werden: Legt man irgendeine gleichseitige Hyperbel durch die Eckpunkte eines gegebenen Dreiecks, so geht diese auch durch den Höhenschnittpunkt des Dreiecks.

Ansatz zum Beweis: hyp ... $x^2 + Bxy - y^2 + Dx + Ey + F = 0$.

$A(-p/0) \in$ hyp: $p^2 - Dp + F = 0$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ $q^2-p^2+D(q+p) = 0, \ldots, D = \underline{p-q}$

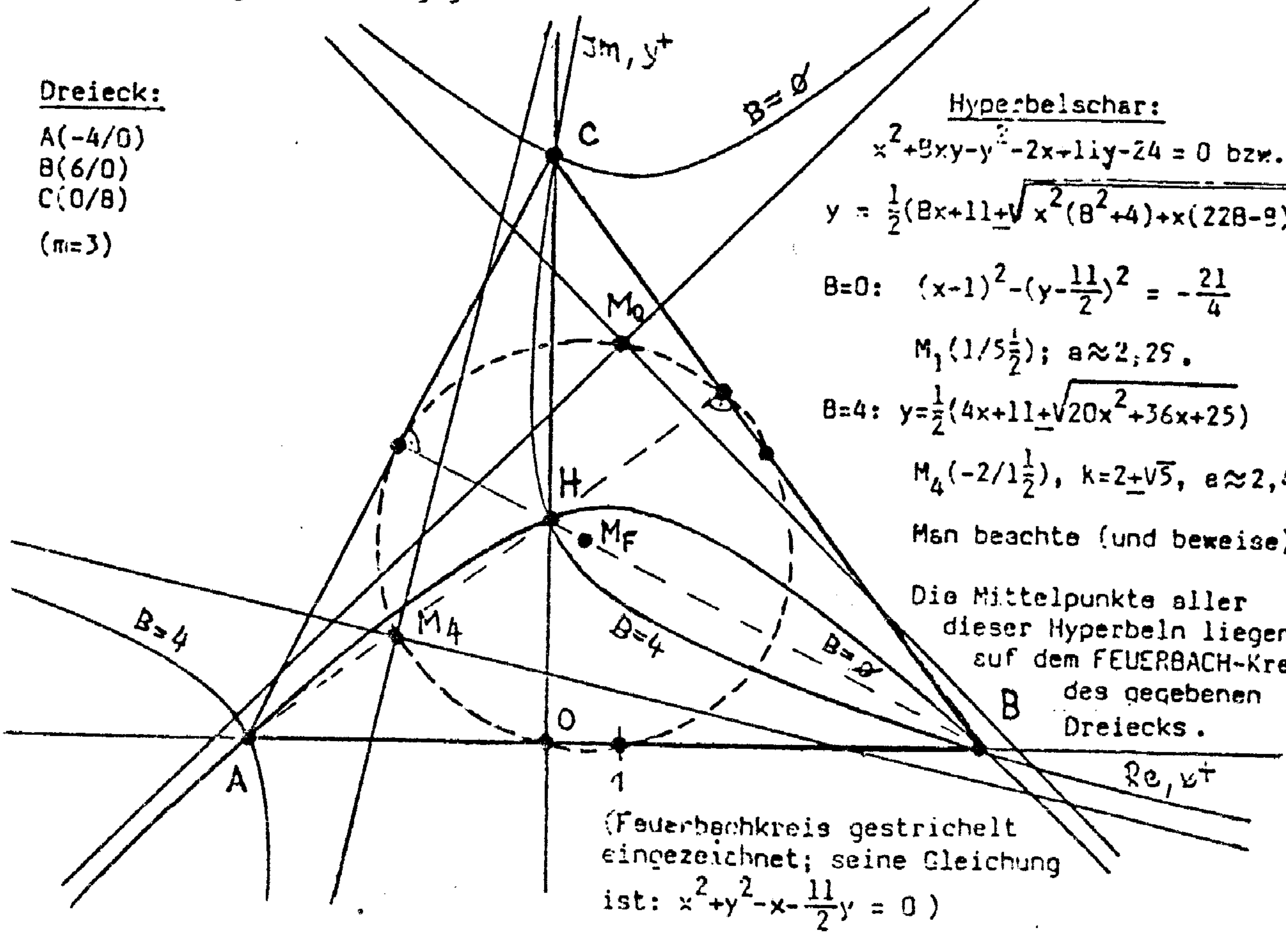
$B(q/0) \in$ hyp: $q^2 + Dq + F = 0$ $\quad$ $p^2-(p-q).p + F = 0, \ldots, F = \underline{-pq}$

$C(0/h) \in$ hyp: $-h^2 + Eh + F = 0 \longrightarrow -h^2+Eh-pq = 0, \ldots, E = \underline{h + \frac{pq}{h}}$

Durch Einsetzen kann leicht nachgewiesen werden, daß $H(0/\frac{pq}{h}) \in$ hyp gilt.

Nachbemerkung: Aus leicht ersichtlichen Gründen kann der Koeffizient B nicht berechnet werden; somit gibt es eine einparametrige Menge von gleichseitigen Hyperbeln durch die drei Eckpunkte eines gegebenen Dreiecks.

In der nachfolgenden Zeichnung sind die Hyperbeln für B=0 und B=4 eingezeichnet und mit einigen Daten angegeben.



Dreieck:

A(-4/0)
B(6/0)
C(0/8)
(m=3)

Hyperbelschar:

$x^2+Bxy-y^2-2x+11y-24 = 0$ bzw.

$y = \frac{1}{2}(Bx+11\pm\sqrt{x^2(B^2+4)+x(22B-8)+25})$

B=0: $(x-1)^2-(y-\frac{11}{2})^2 = -\frac{21}{4}$

$M_1(1/5\frac{1}{2})$; $a \approx 2,29$.

B=4: $y=\frac{1}{2}(4x+11\pm\sqrt{20x^2+36x+25})$

$M_4(-2/1\frac{1}{2})$, $k=2\pm\sqrt{5}$, $e \approx 2,48$.

Man beachte (und beweise):

Die Mittelpunkte aller dieser Hyperbeln liegen auf dem FEUERBACH-Kreis des gegebenen Dreiecks.

(Feuerbachkreis gestrichelt eingezeichnet; seine Gleichung ist: $x^2+y^2-x-\frac{11}{2}y = 0$)

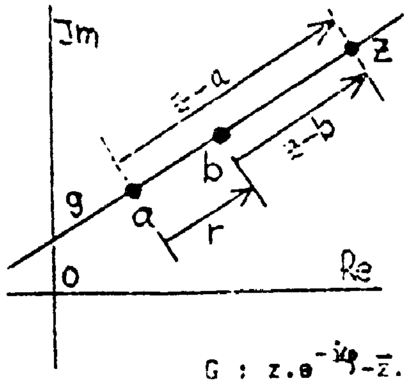
2. Nachbemerkung: Dieser Satz wird vielfach als seine Umkehrung zum Beweisen aufgegeben: Nimmt man auf einer gleichseitigen Hyperbel ein Dreieck an, so liegt auch der Höhenschnittpunkt dieses Dreiecks auf der Hyperbel.

Bei analytisch-geometrischer Behandlung genügt es, mit hyp: x.y=1 zu rechnen.

Analytische Geometrie im R_2 mithilfe Komplexer Zahlen

Geradengleichung

1. Gleichung der Geraden durch zwei gegebene Punkte



Gegeben seien die Punkte a und b. Für einen beliebigen Punkt z der Geraden sind z-a und z-b parallel, haben also gleiche bzw. um 180° differierende Argumente; ihr Teilverhältnis (Quotient zwecks Berechnung des Winkels) ist somit reell. Diese Überlegungen führen zum Ansatz:

$$\frac{z-a}{z-b} = \frac{\bar{z}-\bar{a}}{\bar{z}-\bar{b}} \text{ , ... , letztlich zu :}$$

$z.(\overline{b-a}) - \bar{z}.(b-a) = a.\bar{b} - \bar{a}.b$. Division durch $|b-a|$ ($= |\overline{b-a}|$) ergibt:

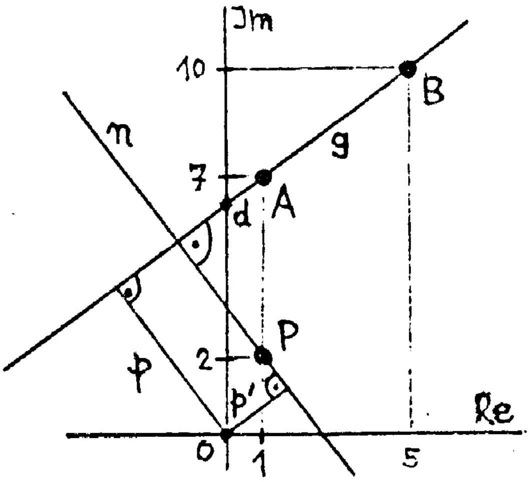
$$G : \underline{\underline{z.e^{-i\varphi} - \bar{z}.e^{i\varphi} = \mu.i}} \quad \text{mit } \mu \text{ aus } R .$$

Die geometrische Bedeutung des Faktors μ kann man erkennen, wenn man den "Abschnitt auf der y-Achse" benützt. Belegt man z mit di, sinngemäß $\bar{z}$ mit -di, so erhält man $di.(e^{-i\varphi}+e^{i\varphi}) = \mu i$, $\mu = 2d.\cos\varphi = 2p$, wobei p der Normalabstand der Geraden g vom Ursprung ist. Das Endergebnis entspricht also der HESSEschen Normalform aus der reellen Analytischen Geometrie.

$$g : \underline{\underline{z.e^{-i\varphi} - \bar{z}.e^{i\varphi} = 2pi}} \quad \text{oder } \underline{Im(z.e^{-i\varphi})=2p} \text{ bzw. } \underline{Im(z.\bar{r}) = b} \text{ ,}$$

r ... Richtungsvektor

<u>Beispiel:</u> Man bestimme die Gleichung der Geraden g durch A(1+7i), B(5+10i) und berechne ihren Abstand vom Ursprung.



Ansatz: $\frac{z-(1+7i)}{z-(5+10i)} = \frac{\bar{z}-(1-7i)}{\bar{z}-(5-10i)}$, ... ,

$g : \underline{z.(4-3i) - \bar{z}.(4+3i) = 50i} \quad | : 5$

$$g_{HNF} : \underbrace{z.\frac{4-3i}{5}}_{e^{-i\varphi}} - \underbrace{\bar{z}.\frac{4+7i}{5}}_{e^{i\varphi}} = \underbrace{10i}_{2p} \text{ ;}$$

$\varphi = \arccos\frac{4}{5} = \underline{36°52'12''}$; $\underline{d = 6\frac{1}{4}}$, $\underline{\underline{p = 5}}$.

Ansatz mittels des Richtungsvektors:

$r = (5+10i)-(1+7i) = 4+3i$, somit

$g : \underline{z.(4-3i) - \bar{z}.(4+3i)} = 2.Im(1+7i)(4-3i) = \underline{50i}$

2. Gleichung der Normalen n zu einer gegebenen Geraden g durch einen Punkt P.

Zu wissen ist: $e^{i(\varphi+\pi/2)} = i.e^{i\varphi}$, $e^{-i(\varphi+\pi/2)} = -i.e^{-i\varphi}$.

Also geht die Gleichung für $g : z.\bar{r} - \bar{z}.r = bi$ über in

$$\underline{\underline{n : z.\bar{r} + \bar{z}.r = c}} \quad \text{bzw. } \underline{Re(z.\bar{r}) = c} \quad (\text{aus } R)$$

c ermittelt man durch Belegen von z mit der Kompl. Zahl von P.

<u>Beispiel:</u> Die Normale n zu g (1. Beispiel) durch P(1+2i) hat die Gleichung $z.(4-3i) + \bar{z}.(4+3i) = 20$. Auf ihre HNF kommt man durch Multiplizieren mit i und Normieren von r :

$n : \underline{z.(3+4i)-\bar{z}.(3-4i) = 20i}$ bzw. $\underline{z.\frac{3+4i}{5} - \bar{z}.\frac{3-4i}{5} = 4i}$

also ist $\underline{\underline{p'=2}}$, Beachte: Aus $a,\bar{a}$ konj.k. folgt $ai, -\bar{a}i$ konj.k.!

Kreisgleichung

1. Doppelverhältnis von 4 Punkten auf einer Kreislinie der Kompl. Zahlenebene

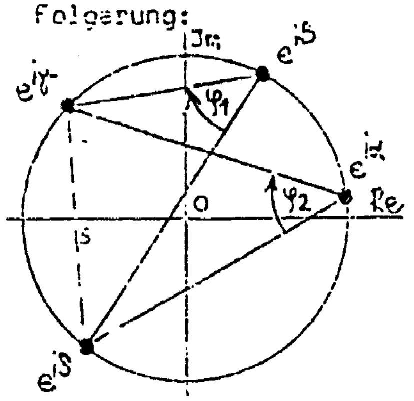
Es genügt, anzunehmen: $A(e^{i\alpha})$, $B(e^{i\beta})$, $C(e^{i\gamma})$, $D(e^{i\delta})$. $DV(A,B;C,D) =$

$$= \left| \frac{e^{i\alpha}-e^{i\gamma}}{e^{i\alpha}-e^{i\delta}} : \frac{e^{i\beta}-e^{i\gamma}}{e^{i\beta}-e^{i\delta}} \right| = \frac{e^{-i\gamma}-e^{-i\alpha}}{e^{-i\delta}-e^{-i\alpha}} : \frac{e^{-i\gamma}-e^{-i\beta}}{e^{-i\delta}-e^{-i\beta}} \overset{\cdot(-1)}{=\!=} \frac{e^{-i\alpha}-e^{-i\gamma}}{e^{-i\alpha}-e^{-i\delta}} : \frac{e^{-i\beta}-e^{-i\gamma}}{e^{-i\beta}-e^{-i\delta}} = \overline{DV},$$

also ist das $DV(A,B;C,D)$ reell . Daraus ergibt sich der Lehrsatz:

> Liegen vier Punkte der Komplexen Zahlenebene auf einer Kreislinie (die auch eine Gerade sein kann), so ist ihr Doppelverhältnis reell

Folgerung:

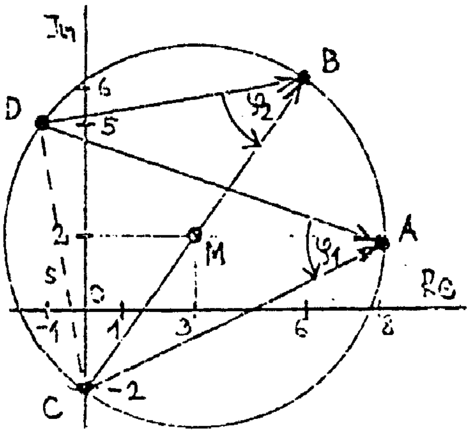


Weil das Doppelverhältnis von 4 Punkten einer Kreislinie reell ist, subtrahieren sich die Argumentwinkel der Teilverhältnisse zu 0 bzw. zu π, die zugehörigen Argumentwinkel sind also gleich bzw. supplementär. Somit ist der

Peripheriewinkelsatz

bewiesen.

1. Beispiel: Gegeben seien die Punkte $A(8+2i)$, $B(6+6i)$, $C(-2i)$, $D(-1+5i)$.



Man zeige durch Rechnung, daß das $DV(A,B;C,D)$ reell ist und berechne die Perpheriewinkel !

$$DV = \frac{8+2i-(-2i)}{8+2i-(-1+5i)} : \frac{6+6i-(-2i)}{6+6i-(-1+5i)} = \frac{8+4i}{9-3i} : \frac{6+8i}{7+i} =$$

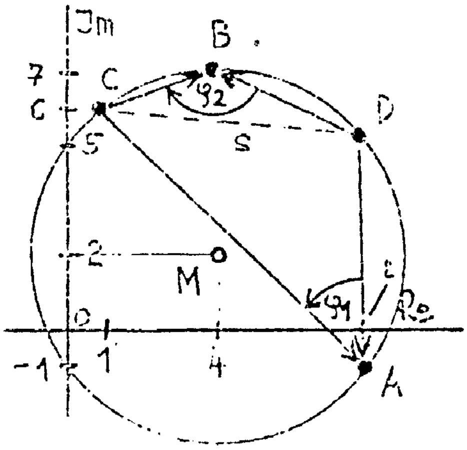
$$= \frac{52+36i}{78+54i} = \frac{4(13+9i)}{6(13+9i)} = \frac{2}{3}.$$

$$\varphi_1 = \arg\frac{8+4i}{9-3i} = \arg\frac{2+i}{3-i} \overset{\cdot(3+i)}{=\!=\!=} \arg(5+5i) = \ldots = \underline{\frac{\pi}{4}}.$$

$$\varphi_2 = \arg\frac{6+8i}{7+i} = \arg\frac{3+4i}{7+i} \overset{\cdot(7-i)}{=\!=\!=} \arg(25+25i) = \ldots = \underline{\frac{\pi}{4}}.$$

Somit gilt: $\underline{\underline{\varphi_1 = \varphi_2}}$.

2. Beispiel: Gegeben seien die Punkte $A(8-i)$, $B(4+7i)$, $C(1+6i)$, $D(8+5i)$.



Man zeige durch Rechnung, daß das $DV(A,B;C,D)$ reell ist und berechne die Peripheriewinkel !

$$DV = \frac{8-i-(1+6i)}{8-i-(8+5i)} : \frac{4+7i-(1+6i)}{4+7i-(8+5i)} = \frac{7-7i}{-6i} : \frac{3+i}{-4+2i} =$$

$$= \frac{-14+42i}{6-18i} = \frac{-14(1-3i)}{6(1-3i)} = -\frac{7}{3}.$$

$$\varphi_1 = \arg\frac{7-7i}{-6i} = \arg\frac{1-i}{-i} \overset{\cdot(-i)}{=\!=\!=} \arg(1+i) = \underline{\frac{\pi}{4}}$$

$$\varphi_2 = \arg\frac{3+i}{-4+2i} = \arg\frac{3+i}{-2+i} \overset{\cdot(-2-i)}{=\!=\!=} \arg(-5-5i) =$$

$$= \arg(-1-i) = -\underline{\frac{3\pi}{4}}\text{; also gilt: } \underline{\underline{\varphi_1 - \varphi_2 = \pi}}.$$

Schnittpunkte Kreislinie - Gerade

Aufgabe: Man berechne die Schnittpunkte des Kreises k durch $P(4+2i)$, $Q(3+3i)$, $R(1-i)$ mit der Geraden g durch $A(2+2i)$, $B(3+i)$.

a) Ermittlung der Kreisgleichung mithilfe des Doppelverhältnisses:

Ansatz: $\frac{z-(4+2i)}{z-(3+3i)} : \frac{1-i-(4+2i)}{1-i-(3+3i)} = \frac{\bar z-(4-2i)}{\bar z-(3-3i)} : \frac{1+i-(4-2i)}{1+i-(3-3i)}$; dies führt letztlich auf

$z.\bar z - z.(2-i) - \bar z.(2+i) = 0$ und somit auf $k : (z-(2+i))(\bar z-(2-i)) = 5$ bzw.

$k : |z-(2+i)| = \sqrt{5}$.

Ermittlung der Kreisgleichung auf die übliche Art:

$m(PQ)$: $\vec{PQ}=-1+i$, $M(PQ) = \frac{7}{2}+\frac{5i}{2}$; $z.(-1-i)+\bar z.(-1+i) = 2.Re(\frac{7}{2}+\frac{5i}{2})(-1-i) = -2$

$m(PR)$: $\vec{PR}=-3-3i$, $M(PR) = \frac{5}{2}+\frac{i}{2}$; $z.(1-i)+\bar z.(1+i) = 2.Re(\frac{5}{2}+\frac{i}{2})(1-i) = 6$

$m(PQ)\cap m(PR)$:

$$\begin{array}{rl} z(-1-i)+\bar z(-1+i) = -2 & \big|\ .(1+i) \\ z(1-i)+\bar z(1+i) = 6 & \big|\ .(1-i) \\ \hline z.(-2i-2i) = 4-8i\ \ldots & \end{array}$$

$z_M = 2+i$; $\vec{MP} = 2+i$, $r = \sqrt{5}$; Ergebnis wie oben.

b) Ermittlung der Geradengleichung mithilfe des Teilverhältnisses:

Ansatz: $\frac{z-(2+2i)}{z-(3+i)} = \frac{\bar z-(2-2i)}{\bar z-(3-i)}$, führt letztlich auf

$g : z.(1+i) - \bar z.(1-i) = 8i$.

Ermittlung der Geradengleichung mithilfe des Richtungsvektors:

$\vec{AB} = 1-i$, $z.(1+i)-\bar z.(1-i) = 2i.Im(2+2i)(1+i) = 2i.4 = 8i$

Ergebnis wie oben.

c) Schnittpunkte-Berechnung von k mit g

Explizite Form bez. $\bar z$ der Geradengleichung:

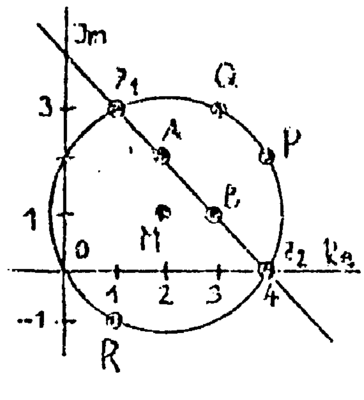
$\bar z = z.\frac{1+i}{1-i} - \frac{8i}{1-i} = \ldots = iz + 4-4i$;

in k: $(z-2-i).(iz+4-4i-2+i) = 5$

....

$z^2 + z.(-3i-5) + 12i+4 = 0$

Ergebnis: $z_1 = 1+3i$, $z_2 = 4$.



Weitere Aufgabe: $k[P(7+9i), Q(-5+3i), R(4-6i)]$, $g[A(1+5i), B(6+4i)]$.

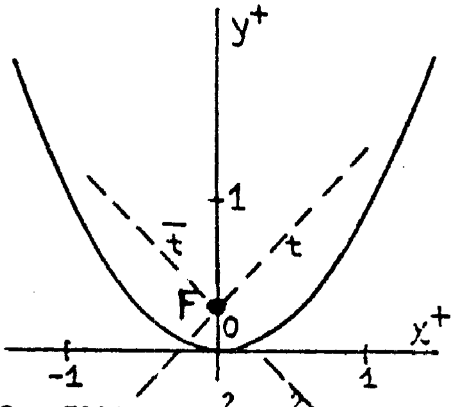
Lösung: k: $|z-(3+2i)| = \sqrt{65}$, g: $z(5+i) - \bar z(5-i) = 52i$.

$k\cap g$ führt auf: $z^2 - z.(7+9i) - 62 + 54i = 0$;

Ergebnis: $z_1 = -4+6i$, $z_2 = 11+3i$.

Berechnung der Brennpunkte reeller Kegelschnitte mithilfe komplexer Tangenten

1. Grundparabel $y = x^2$



Ansatz: $t \ldots y = ix+d$

$t \cap par \ldots x^2 = ix+d$

$x^2 - ix - d = 0$

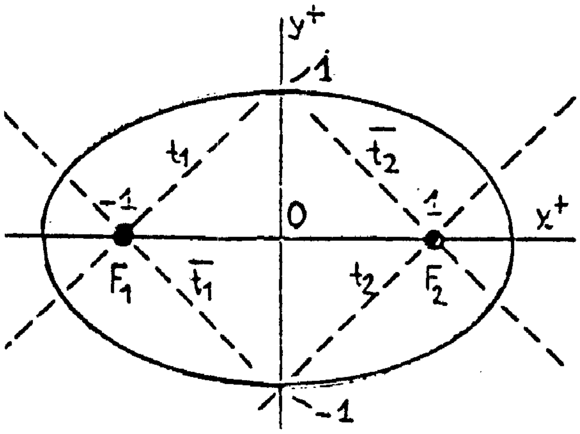
$B^2-4AC=0 \ldots -1+4d = 0; \quad \underline{d = \frac{1}{4}}, \ \underline{\bar{d} = \frac{1}{4}}$.

$t \ldots y = ix + \frac{1}{4}$

$\bar{t} \ldots y = -ix + \frac{1}{4}$

$t \cap \bar{t} \ldots x = 0; \quad \underline{\underline{F(0/\frac{1}{4})}}$.

2. Ellipse $x^2 + 2y^2 = 2$



Ansatz: $t \ldots y = ix+d$

$t \cap ell \ldots x^2+2.(-x^2+d^2+2idx) = 2$

....

$x^2 - 4idx + 2(1-d^2) = 0$

$B^2=4AC \ldots -16d^2 = 8.(1-d^2); \quad \underline{d = \pm i}$.

$t_1 \ldots y = ix+i, \quad \bar{t_1} \ldots y = -ix-i$

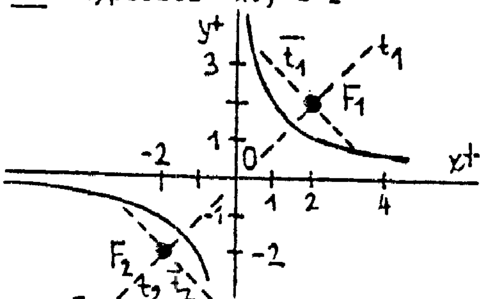
$t_1 \cap \bar{t_1} \ldots \underline{\underline{F_1(-1/0)}}$,

$t_2 \ldots y = ix-i, \quad \bar{t_2} \ldots y = -ix+i$

$t_2 \cap \bar{t_2} \ldots \underline{\underline{F_2(1/0)}}$.

Ferner treten die Brennpunkte $\underline{F_3(0/i)}$ und $\underline{F_4(0/-i)}$ auf.

3. Hyperbel $x.y = 2$



Ansatz: $t \ldots y = ix+d$

$t \cap hyp \ldots ix^2 + dx - 2 = 0$

$B^2=4AC \ldots d^2 = -8, \quad \underline{d = \pm 2.(1-i)}$.

t_1: $y=ix+2(1-i)$, $\bar{t_1}$: $y=-ix+2(1+i)$,..., $\underline{\underline{F_1(2/2)}}$

t_2: $y=ix-2(1-i)$, $\bar{t_2}$: $y=-ix-2(1+i)$,..., $\underline{\underline{F_2(-2/-2)}}$

Ferner treten die Brennpunkte $\underline{F_3(2i/-2i)}$ und $\underline{F_4(-2i/2i)}$ auf .

Weitere Aufgabe: Man berechne die Brennpunkte der angegebenen Ellipse mithilfe konjugiert komplexer Tangenten.

ell: $17x^2-16xy+17y^2-2x-52y = 397$

Lösung: $\underline{\underline{F_1(-3/-2)}}$, $\underline{\underline{F_2(5/6)}}$; $\underline{F_3(1-4i/2+4i)}$, $\underline{F_4(1+4i/2-4i)}$.

Über das Berechnen komplexer Lösungen von algebraischen Gleichungen mit Koeffizienten aus R.

Beispiel mit Erläuterungen.

Aufgabe: Man löse die Gleichung $x^4-2x^3+4x^2-4x+4=0$ in C !

(1) Weil in diesem Fall (reelle Koeffizienten) komplexe Lösungen in konjugierten Paaren auftreten, versucht man das Gleichungspolynom P(x) in die Form zu faktorisieren:

$$P(x) = (x^2+px+q).Q(x) .$$

Dies geschieht durch Dividieren $(x^4-2x^3+4x^2-4x+4):(x^2+px+q)$.

Man erhält als Quotient $x^2+x(-2-p)+(4-q+2p+p^2)$, der Rest ergibt sich mit

$$x(-4+2q-4p+2pq-2p^2-p^3) + (4-4q+q^2-2pq-p^2q) .$$

Weil der Rest für alle x-Werte verschwinden soll, hat man das System zu lösen:

$$\left.\begin{matrix} p^3+2p^2-2pq+4p-2q+4=0 \\ p^2q+2pq-q^2+4q-4 = 0 \end{matrix}\right\} \wedge \quad , \text{ und zwar in } R\times R \quad (!!) .$$

Dieses Verfahren ist heute naheliegend; es wurde jedoch schon 1914 von L. BAIRSTOW in "Reports and memoranda of Advisory Commitee for Aeronautics", Nr. 154 beschrieben.

(2) Algebraische Gleichungssysteme höheren Grades können meist nur iterativ gelöst werden; computergestütztes Rechnen bietet sich an. Bei Systemen in 2 Variablen und zwei Gleichungen ist das NEWTON-Verfahren nützlich:

$(f(x,y)=0) \wedge (g(x,y)=0)$ kann iterativ mithilfe der Rekursionsformeln

$$x_{k+1} = x_k - \left.\frac{f.g_y-g.f_y}{f_xg_y-g_xf_y}\right|_{(x_k,y_k)} \quad \text{und} \quad y_{k+1} = y_k - \left.\frac{g.f_x-f.g_x}{f_xg_y-g_xf_y}\right|_{(x_k,y_k)}$$ gelöst werden.

Dabei sind f_x, f_y, g_x und g_y die partiellen Ableitungen von f und g nach x bzw. y. Schreibt man das unter (1) zu lösende Gleichungssystem auf p=x und q=y um, so ergibt sich:

$$f = x^3+2x^2-2xy+4x-2y+4 , \quad f_x= 3x^2-4x-2y+4 , \quad f_y= -2x-2 ,$$
$$g = x^2y+2xy-y^2+4y-4 , \quad g_x= 2xy+2y , \quad g_y= x^2+2x-2y+4 .$$

(3) Bemerkungen zur praktischen Durchführung des Lösungsvorganges.
Es ist von großer Bedeutung, einen günstigen Anfangspunkt $A(x_0,y_0)$ zu finden, für den das NEWTON-Verfahren überhaupt und dann möglichst rasch konvergiert. In unserem Fall sind graphische Darstellungen der Relationen f und g leicht möglich, weil die zugehörigen expliziten Formen mühelos gefunden werden können (y tritt in f linear auf, x in g nur quadratisch).
Kann oder will man keine graphischen Darstellungen verwenden, dann untersucht man die sogenannte "Konvergenzlandschaft"; d.h., man checkt viele einzelne Anfangspunkte durch. In unserem Fall kommt man, wie unten angeführt wird, auf zwei Grenzpunkte; angegeben sind Anfangspunkt und die Anzahl der NEWTON-Schritte.

Grenzpunkt (-2;2):		Grenzpunkt (0;2):
(0;0) ..... 19 Schritte	(-3;3) ..... 14 Schritte	(0;1) ..... 6 Schritte
(1;0) ..... 32 Schritte	(-1;2) ..... 32 Schritte	(0;3) ..... 5 Schritte
(1;1) ..... 55 Schritte	(-1;3) ..... 35 Schritte	(1;2) ..... 7 Schritte
(2;1) ..... 54 Schritte	(-10;-10) .. 20 Schritte	(2;2) ..... 7 Schritte
(3;-3) .... 26 Schritte	(-10;10) ... 20 Schritte	(3;3) ..... 7 Schritte

Zur Kontrolle findet man mit den Anfangspunkten (-2;2) und (0;2) konstante Folgen.
Die angegebenen Daten wurden mit HP-97 Calculator ermittelt.

Somit ergibt sich die Faktorisierung $x^4-2x^3+4x^2-4x+4 = (x^2-2x+2).(x^2+2)$
und damit das Ergebnis:

$$L = \{1-i;1+i;-i\sqrt{2};i\sqrt{2}\} .$$

(4) Literaturangaben für die Theorie des Verfahrens:

W. TÖRNIG "Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker", Band 1
SPRINGER-Verlag.

R. ZURMÜHL "Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker"
SPRINGER-Verlag.

E. STIEFEL "Einführung in die numerische Mathematik", Teubner Studienbücher, Verlagsnummer 2039, Verlag B.G. TEUBNER, Stuttgart.

(5) Die gestellte Aufgabe ist so gewählt, daß das Ergebnis leicht überprüft und vorallem auf ganz primitive Weise gefunden werden kann; zur Faktorisierung sind nämlich nur die Mittel der Unterstufen-Schulmathematik erforderlich. Es sollte sofort auffallen, daß in P(x) das 1., 3. und 5. (letzte) Glied ein Binomquadrat bilden; darüber hinaus läßt sich aus 2. und 4. Glied (-2x) herausheben. Man kann also schreiben:

$$x^4-2x^3+4x^2-4x+4 = (x^2+2)^2-2x.(x^2+2) = (x^2+2).(x^2-2x+2),$$

was zur Kontrolle der nach BAIRSTOW und NEWTON gefundenen Zerfällung gut verwendet werden kann.

Ein weiteres Beispiel:

Aufgabe: Man löse $x^4-2x^3+x^2+x+1 = 0$ in C.

Hinweise zum Lösungsweg:

(1) Das BAIRSTOW-Verfahren führt auf die zu ermittelnde Zerfällung $(x^2+px+q).(x^2+x(-2-p)+1-q+2p+p^2)$, der dabei zunächst verbleibende Divisionsrest ist $x.(1+2q+2pq-p-2p^2-p^3) + (1-q+q^2-2pq-p^2q)$.

Somit ist das folgende (auf p=x und q=y umgeschriebene) System zu lösen:

$$x^3+2x^2-2xy+x-2y-1=0$$
$$x^2y+2xy-y^2+y-1 = 0$$

(2) Das oben angeführte System läßt sich mithilfe des NEWTON-Verfahrens schnell lösen. Dazu benötigt man:

$$f = x^3+2x^2-2xy+x-2y-1 \qquad f_x = 3x^2+4x-2y+1 \qquad f_y = -2x-2$$
$$g = x^2y+2xy-y^2+y-1 \qquad g_x = 2xy+2y \qquad g_y = x^2+2x-2y+1$$

(3) Die ermittelte Zerfällung lautet:

$$(x^2+0,750552637x+0,371316861).(x^2-2,750552637x+2,693117673) .$$

Daraus ergeben sich die Lösungszahlen:

$-0,375\,276\,319 \pm i.0,480\,088\,061$ und $+1,375\,276\,319 \pm i.0,895\,395\,287$